数理解析研究所講究録
1112巻 1999年 70-85

De Branges-Rovnyak 空間
—Bieberbach の予想からの導入—

日本工業大学・工学部　大野　修一　(Shûichi Ohno)

0. Bieberbach の予想

関数論の重要な定理の一つに Riemann の写像定理がある（例えば [C78:p.160] 参照）.

Riemann の写像定理. 複素平面上の少なくとも二つの境界点をもつ単連結領域は, ある解析的な関数 $f(z)$ によって, 単位円の内部を 1 対 1 かつ等角に写されたものである.

この関数 $f(z)$ は Riemann の写像関数といわれるが, $f(0)=0$, $f'(0)>0$ として扱われる. これを関数の正規化という. こうした関数の一例として Koebe 関数がある：

$$\frac{z}{(1-wz)^2}=z+2wz^2+3w^2z^3+\cdots.$$

ただし, w は $|w|=1$ の定数. この関数は単位円を複素平面より原点から 1/4 離れた点を出発点とする radial slit を取り除いた領域に写す.

このとき, Bieberbach が次の予想をたてた.

Bieberbach の予想 (1916). 正規化された *Riemann* の写像関数

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nz^n$$

において, その係数は次の条件を満たす：

$$|a_n|\leq na_1 \quad (n>0, 整数).$$

ある $n>1$ に対して上の等式が成り立つのは, $f(z)$ が *Koebe* 関数の定数倍のときだけである.

Bieberbach 自身 $n=2$ の場合を示した. その後,1923 年 K. Löwner が $n=3$ のときを, 1954 年 P.R. Garabedian-M. Schiffer が $n=4$, 1968 年 M. Ozawa と R.N. Pederson が $n=6$, 1972 年 Pederson-Schiffer が $n=5$ のときをそれぞれ示した. Löwner の方法は一般の場合に応用できる道具を含んでいる. そして, 遂に 1984 年 2 月に L. de Branges が W. Gautschi の助けを借りて, すべての係数についての予想を証明した. それには, 次のような関数空間 (Dirichlet 空間) と作用素 (substitution 作用素) が使われた.

$\mathcal{D}$ を D 上の解析的な関数 $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nz^n$ で

$$\|f\|_{\mathcal{D}}^2=\sum_{n=1}^{\infty}n|a_n|^2<\infty$$

であるようなものの全体とする. Bを単位円板の部分領域に対する正規化されたRiemann の写像関数とし, $C_B f(z) = f(B(z))$ とすると, $\|C_B f\|_{\mathcal{D}} \leq \|f\|_{\mathcal{D}}$ となる. このとき, C_B は $B(z)$-substitution 作用素と呼ばれる. $B(z)$-substitution 作用素は$\mathcal{D}$上の縮小写像である.

$\nu \in R$に対して, $\mathcal{D}_\nu$ を D上の解析的な関数 $f(z) = \sum a_n z^{\nu+n}$ で

$$\|f\|_\nu^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (\nu + n)|a_n|^2 < \infty$$

であるようなものの全体とする. Bを正規化されたRiemann の写像関数とするとき, $f \in \mathcal{D}_\nu$ に対して, $C_B f \in \mathcal{D}_\nu$ であり, $\|C_B f\|_\nu \leq \|f\|_\nu$ となる. $\nu = -2$ はT.H. Gronwall によって証明されたarea theorem の強い場合であり, Bieberbach はこれを$n = 2$ の場合の証明に使った. 1939 年H. Grusky によって, このarea theorem が一般化され, Bieberbach の予想の $n = 4, 5, 6$ の場合の証明の道具となった. そして, Bieberbach の予想はRobertson(1936) の予想, Milin の予想(1971) と言い換えられていったが, de Branges は上のような関数解析的な道具を用いて, Milin の予想を示し, Bieberbach の予想に完全に答えたのである.

こうしたことは[Bea86] や [dB86] などに詳しく載っているが, その後もJ. B. Conway[C95:Chap.17] やX. Ming-Qin[MQ97] らによる別証や拡張も与えられている. そして, de Branges の証明に使われた技法に着目したD. Sarason はその方法を自身の研究テーマである単位円上の関数空間や作用素の研究に持ち込み, 継続した理論を展開している. 本論はその成果である [Sa86b] や [Sa94b] を中心にまとめ, 関連した問題を整理したものである.

1. 基礎概念

この章では, Hilbert 空間とその上の作用素の一般の結果をまとめる.

H_1 と H_2 をそれぞれHilbert 空間とする. もし H_1 が H_2 の部分空間であり, H_1 から H_2 への包含写像が有界のとき,H_1 は H_2 に有界に含まれるという. さらにその写像が縮小写像(norm が1 以下, contraction) であるとき, H_1 は H_2 に縮小的に含まれるという. 例えば, H の任意の閉部分空間は H に縮小的 (等距離的) に含まれている.

A を H_1 から H_2 への有界な線形作用素とする. $\mathcal{M}(A)$ を A の値域とし, A が H_1 から $\mathcal{M}(A)$ への上へのcoisometry となるようにHilbert 空間の構造を与えるものとする. すなわち, $\ker A$ を A の核 $\{x : Ax = 0\}$ とすると, $x, y \in H_1$, $x, y \perp \ker A$ に対して,

$$\langle Ax, Ay \rangle_{\mathcal{M}(A)} = \langle x, y \rangle_{H_1}$$

である. また, このとき $x \perp \ker A$, $y \in H_1$ ならば,

$$\langle Ax, Ay \rangle_{\mathcal{M}(A)} = \langle x, y \rangle_{H_1}$$

である. $\mathcal{M}(A)$ は H_2 に有界に含まれ, さらに A が縮小写像ならば, $\mathcal{M}(A)$ は H_2 に縮小的に含まれる.

$y \in H_2$ に対して, y によって導かれた H_2 上の有界線形汎関数の $\mathcal{M}(A)$ への制限は $\mathcal{M}(A)$ 上の有界線形汎関数となる. よって, それは $\mathcal{M}(A)$ の内積によった $\mathcal{M}(A)$ の要素によって導かれる：$x \perp \ker A$ に対して,

$$\begin{aligned}\langle Ax, y\rangle_{H_2} &= \langle x, A^*y\rangle_{H_1}\\ &= \langle Ax, AA^*y\rangle_{\mathcal{M}(A)}.\end{aligned}$$

作用素の値域については次の Douglas の結果 ([Do66]) が有益である.

補題 1.1(Douglas). A と B を *Hilbert* 空間 H 上の有界な線形作用素とする. このとき次の条件は同値である：

(1) A の値域は B の値域に含まれる;
(2) ある $\kappa > 0$ に対して, $AA^* \leq \kappa^2 BB^*$ が成り立つ;
(3) H 上の有界線形作用素 C が存在して, $\|C\| \leq \kappa$, $A = BC$ を満たす.

これより, 次の定理がすぐでる.

定理 1.2. (1) $\mathcal{M}(A)$ が $\mathcal{M}(B)$ に有界に (縮小的に) 含まれるための必要十分条件は $AA^* \leq \kappa^2 BB^* (\kappa^2 = 1)$ である.

(2) $\mathcal{M}(A)$ と $\mathcal{M}(B)$ が *Hilbert* 空間として一致するための必要十分条件は $AA^* = BB^*$ である. 特に, $\mathcal{M}(A) = \mathcal{M}((AA^*)^{1/2})$ である.

(3) $\mathcal{M}(A)$ が H の普通の閉部分空間 ($\mathcal{M}(A)$ が H の *norm* で閉部分空間となっている) であるための必要十分条件は A が部分等長作用素 (*partial isometry*) である. すなわち, $x \perp \ker A$ に対して, $\|Ax\| = \|x\|$.

A が縮小写像のとき, $\mathcal{M}((1 - AA^*)^{1/2})$ を $\mathcal{M}(A)$ の補部分空間といい, $\mathcal{H}(A)$ で表す. $\mathcal{M}(A)$ が普通の部分空間, すなわち, A が部分等長作用素ならば, AA^*, $1 - AA^*$ は補射影作用素であり, $\mathcal{H}(A)$ は $\mathcal{M}(A)$ の普通の直交補空間となる. そうでないとき, $\mathcal{M}(A) \cap \mathcal{H}(A)$ は重複空間 (overlapping) と呼ばれる.

定理 1.3. A が縮小写像ならば,

$$A(1 - A^*A)^{1/2} = (1 - AA^*)^{1/2}A.$$

次の定理が $\mathcal{H}(A)$ と $\mathcal{H}(A^*)$ の関係を与える.

定理 1.4. A を H_1 から H_2 への縮小写像とする. $x \in H_2$ が $\mathcal{H}(A)$ に属するための必要十分条件は $A^*x \in \mathcal{H}(A^*)$ である. このとき, $x_1, x_2 \in \mathcal{H}(A)$ ならば,

$$\langle x_1, x_2\rangle_{\mathcal{H}(A)} = \langle x_1, x_2\rangle_{H_2} + \langle A^*x_1, A^*x_2\rangle_{\mathcal{H}(A^*)}$$

である.

重複空間 $\mathcal{M}(A) \cap \mathcal{H}(A)$ が non-trivial でないことは [定理 1.4] で A を A^* としてみることよりでる.

定理 1.5. A を上のようにするとき,

$$\mathcal{M}(A) \cap \mathcal{H}(A) = A\mathcal{H}(A^*).$$

よって, $\mathcal{M}(A)\cap\mathcal{H}(A) = \{0\}$ であるための必要十分条件は $A(1-A^*A)^{1/2} = 0$, すなわち, $A(1-A^*A) = 0$, $A = AA^*A$ である. よって, このとき $AA^* = (AA^*)^2$ となり, AA^* は射影となる. $\mathcal{M}(A)$ と $\mathcal{H}(A)$ は互いに直交補空間となる.

2. De Branges-Rovnyak 空間

Hardy 空間とその上の Toeplitz 作用素を導入して, 1 章の結果からでる性質を述べる.

まず Hardy 空間を定義する. D を単位円板とし, ∂D を単位円周とする. $1 \le p \le \infty$ に対して, L^p を ∂D 上の Lebesgue 空間とする. さらに, $1 \le p < \infty$ のとき

$$H^p = \left\{ f \in L^p : \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta = 0, n = -1, -2, \cdots \right\}$$

とし,

$$H^\infty = \{f : D\text{上の有界な解析関数}\}$$

とおく. このとき, H^p は次のように定義された norm $\|\cdot\|_p$ によって, 古典的な Hardy 空間と呼ばれる Banach 空間となる:

$$\|f\|_p^p = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^p d\theta, \quad 1 \le p < \infty$$

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(z)| : z \in D\}.$$

特に, $p = 2$ のときは内積

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\overline{g(e^{i\theta})} d\theta$$

をもつ Hilbert 空間となる.

P を L^2 から H^2 への直交射影とする. $\varphi \in L^\infty$ に対して,

$$T_\varphi f = P(\varphi f), \quad f \in H^2$$

と定義すると, T_φ は H^2 から H^2 への有界な線形作用素となる. このとき, T_φ は φ を symbol とする Toeplitz 作用素と呼ばれ, 次のような性質がある;

(1) $\|T_\varphi\| = \|\varphi\|_\infty$;
(2) $T_\varphi^* = T_{\overline{\varphi}}$;
(3) $\varphi, \psi \in L^\infty$, $\varphi \in H^\infty$ または $\psi \in H^\infty$ のとき, $T_{\overline{\psi}} T_\varphi = T_{\overline{\psi}\varphi}$.

Hardy 空間やその上の作用素のついては多数の良書がある．例えば,[Do98], [Du70],[Ho62],[G81],[Sa78] 参照.

いま, $\mathcal{M}(\varphi)=\mathcal{M}(T_\varphi)$ (T_φの値域) とかく．$\|\varphi\|_\infty\le 1$ ならば, T_φは縮小写像となる．このとき$\mathcal{H}(\varphi)=\mathcal{H}(T_\varphi)$ とかく．$\mathcal{H}(\varphi)$ の norm や内積を $\|\cdot\|_\varphi$ や $\langle\cdot\rangle_\varphi$ と記す.

$\lambda\in D$に対して, $k_\lambda(z)=1/(1-\overline{\lambda}z)$ はH^2の核関数となっている：

$$f(\lambda)=\langle f,k_\lambda\rangle,\quad f\in H^2.$$

$\varphi\in L^\infty$, $\|\varphi\|_\infty\le 1$ ならば,

$$\left\langle(1-T_\varphi T_\varphi^*)^{1/2}f,k_\lambda\right\rangle_{H^2}=\left\langle(1-T_\varphi T_\varphi^*)^{1/2}f,(1-T_\varphi T_\varphi^*)k_\lambda\right\rangle_\varphi$$

となることから, $\mathcal{H}(\varphi)$ における核関数k_λ^φ は

$$k_\lambda^\varphi=(1-T_\varphi T_\varphi^*)k_\lambda$$

で与えられる.

定義 2.1. $b\in H^\infty$, $b\ne$定数, $\|b\|_\infty\le 1$ に対して, $\mathcal{H}(b)=\mathcal{H}((1-T_bT_b^*)^{1/2})$ を *de Branges-Rovnyak* 空間と呼ぶ.

同様に, $\mathcal{H}(\overline{b})$ も定義すると,

$$T_bT_{\overline{b}}\le T_{\overline{b}}T_b$$

であるから, [定理 1.2] から$\mathcal{H}(\overline{b})\subset\mathcal{H}(b)$ がでる.

目的は$\mathcal{H}(b)$ や$\mathcal{H}(\overline{b})$ の構造を調べることであるが, 1章の結果からでるものがある.

まず, $\mathcal{H}(b)$ の核関数k_λ^bは次のようにかける. $k_\lambda^b=(1-T_bT_{\overline{b}})k_\lambda$より

$$k_\lambda^b=(1-\overline{b(\lambda)}b)k_\lambda.$$

特に, その norm は

$$\|k_\lambda^b\|_b^2=k_\lambda^b(\lambda)=\frac{1-|b(\lambda)|^2}{1-|\lambda|^2}$$

である.

[定理 1.4] から次のことがでる.

定理 2.2. $f\in H^2$に対して, $f\in\mathcal{H}(b)$ である必要十分条件は$T_{\overline{b}}f\in\mathcal{H}(\overline{b})$ である. さらに$f_1,f_2\in\mathcal{H}(b)$ ならば,

$$\langle f_1,f_2\rangle_b=\langle f_1,f_2\rangle+\langle T_{\overline{b}}f_1,T_{\overline{b}}f_2\rangle_{\overline{b}}.$$

重複空間については[定理 1.5] から次のことがいえる.

定理 2.3.
$$\mathcal{H}(b) \cap \mathcal{M}(b) = T_b \mathcal{H}(\bar{b})$$

次に $\mathcal{H}(b)$ と $\mathcal{H}(\bar{b})$ の不変部分空間性をみる.

定理 2.4. $\varphi \in H^\infty$ とする. $\mathcal{H}(b)$ と $\mathcal{H}(\bar{b})$ は $T_{\overline{\varphi}}$-不変である. これらの空間上の $T_{\overline{\varphi}}$ の norm は $\|\varphi\|_\infty$ を超えない.

特に $\varphi(z) = z$ とおく. $S = T_z$ とすると, $S^* = T_{\bar{z}}$ であり,

$$S^* f(z) = \frac{f(z) - f(0)}{z} = \bar{z}(f(z) - f(0)), \quad f \in H^2$$

である. このとき, $\mathcal{H}(b)$ は S^* 不変である. いま, $X = S^*|_{\mathcal{H}(b)}$ (S^* の $\mathcal{H}(b)$ への制限) とかく.

定理 2.5.

(1) $S^* b \in \mathcal{H}(b)$.
(2) 実際 X^* は次のようにかける：

$$X^* h = Sh - \langle h, S^* b \rangle_b, \quad h \in \mathcal{H}(b).$$

S^* の概念は次のように拡張できる.
$\lambda \in D$ に対して,

$$(Q_\lambda f)(z) = \frac{f(z) - f(\lambda)}{z - \lambda}, \quad f \in H^2$$

とおく. 特に, $Q_0 = S^*$ である. このとき, $Q_\lambda = (1 - \lambda S^*)^{-1} S^*$ となり, $Q_\lambda b \in \mathcal{H}(b)$ であることが示せるが, $\mathcal{H}(b)$ と $\mathcal{H}(\bar{b})$ の Q_λ- 不変性は問題である.

$\varphi \in H^\infty$ が $T_\varphi \mathcal{H}(b) \subset \mathcal{H}(b)$ を満たすとき, φ を $\mathcal{H}(b)$ の乗法因子 (multiplier) という. [定理 2.3] より, $\mathcal{H}(b)$ の乗法因子は $\mathcal{H}(\bar{b})$ の乗法因子である.

また, φ が $\mathcal{H}(b)$ 上の乗法因子のとき, $f \in \mathcal{H}(b)$ に対して, $M_\varphi f = \varphi f$ なる乗法作用素 M_φ を定義すると, $M_\varphi^* k_\lambda^b = \overline{\varphi(\lambda)} k_\lambda^b$ である.

定理 2.6. M を $\mathcal{H}(b)$ 上の有界作用素で, M^* が k_λ^b を固有ベクトルとしてもてば, M は乗法作用素となる.

$\mathcal{H}(b)$ 及び $\mathcal{H}(\bar{b})$ の不変部分空間問題や乗法因子の特徴付けの問題は大きな問題 (難問) であり, 現在でも最も活発に研究されているテーマの一つである. これらについては 4 章でその現況をまとめる.

ここで、$b \in H^\infty$, $\|b\|_\infty \leq 1$ を場合分けすることで, もう少し $\mathcal{H}(b)$ の具体的な様子をみてみよう.

(I) $b = \lambda, |\lambda| \leq 1$ の場合.
(i) $|\lambda| = 1$ ならば
$(1 - T_b T_b^*)^{1/2} = 0$. よって, $\mathcal{H}(b) = \{0\}$.

(ii) $|\lambda| < 1$ ならば
$(1 - T_b T_b^*)^{1/2} = (1 - |\lambda|^2)^{1/2} > 0$. よって, $\mathcal{H}(b) = H^2$.

(II) $\|b\|_\infty < 1$ の場合.
$\|T_b T_b^*\| < 1$ より,$(1 - T_b T_b^*)^{1/2}$ は可逆. よって, $\mathcal{H}(b) = H^2$.

(III) $\|b\|_\infty = 1$ の場合.
(i)$|b| = 1$ ならば
$P_b : H^2 \to bH^2$ と $P_{\bar{b}} : H^2 \to H^2 \ominus bH^2$ をそれぞれ直交射影とするとき,

$$(1 - T_b T_b^*)^{1/2} = P_{\bar{b}}$$

となり,$\mathcal{H}(b) = H^2 \ominus bH^2$ である. よって $H^2 = \mathcal{H}(b) + \mathcal{M}(b)$ であり, $\mathcal{H}(b)$ 上の乗法因子は定数だけである.

(ii) よって, 以上以外の場合を考えることになる. それは b が H^∞ の単位球の端点かどうかで場合分けされている.

3. 角微分への応用

2 章で定義された核関数 k_λ^b の norm の表示から想像されることでもあるかもしれないが, $\mathcal{H}(b)$ の理論は Carathéodory の角微分に関する定理の証明に応用されるが, この定理は合成作用素の compact 性の特徴付けにおいて, 大変有効なものである. これ自体でも興味深いものなので, ここに Hilbert 空間（de Branges-Rovnyak 空間）流の証明を紹介する.([Sa88b],[Sa94b:Chap. VI] による.)

定理 3.1. f を D 上解析的な関数とし,$z_0 \in \partial D$ とする. このとき次の条件は同値である：

(1) f は z_0 で *non-tangential* 極限 $f(z_0)$ をもち, $(f(z) - f(z_0))/(z - z_0)$ は z_0 で *non-tangential* 極限をもつ；
(2) f' は z_0 で *non-tangential* 極限 $f'(z_0)$ をもつ.

これらの条件をもつとき, f は z_0 で角微分をもつといい, 条件 (1) の商の極限を $f'(z_0)$ とかく.

関数 f が z_0 で角微分をもち, $|f'(z_0)| = 1$ であるとき, f は Carathéodory の意味で角微分をもつという.

定理 3.2 (Carathéodory の定理). $z_0 \in \partial D$ に対して

$$c = \liminf_{z \to z_0} \frac{1 - |b(z)|}{1 - |z|} < \infty \tag{C}$$

ならば, b は z_0 で *Carathéodory* の意味で角微分をもつ. $b'(z_0) = cb(z_0)/z_0$ が成り立ち, $(1 - |b(z)|)/(1 - |z|)$ は z が z_0 へ *non-tangential* に近づくとき, c へ近づく.

他方, b が z_0 で *Carathéodory* の意味で角微分をもつならば, z が z_0 へ急速に近づくとき, $(1 - |b(z)|)/(1 - |z|)$ は有界. よって, 条件 *(C)* が成り立つ.

これを $\mathcal{H}(b)$ を使って言い換える.

定理 **3.3.** $z_0 \in \partial D$ とするとき, 次の条件は同値である：

(1) 条件 (C) が成り立つ；

(2) $(b(z)-\lambda)/(z-z_0)$ となるような絶対値が 1 の複素数 λ が存在する；

(3) $\mathcal{H}(b)$ の任意の関数は z_0 で *non-tangential* 極限をもつ.

証明. (1) $\Rightarrow$ (2) $k_z^b(w) = (1-\overline{b(z)}b(w))/(1-\bar{z}w)$ であった.

$$c = \liminf_{z \to z_0} \|k_z^b\|_b^2 = \liminf_{z \to z_0} \frac{1-|b(z)|^2}{1-|z|^2} < \infty$$

とする.

$\{z_n\} \subset D$ として, $\|k_{z_n}^b\|_b^2 \to c$, $z_n \to z_0$ とすると, $b(z_n)$ はある複素数 λ に収束する.

Hilbert 空間の閉単位球は弱 compact であるから, $k_{z_n}^b$ はある関数 $h \in \mathcal{H}(b)$ へ弱位相で収束する. そのとき, $z \in D$ に対して,

$$\begin{aligned} h(z) = \langle h, k_z^b \rangle_b &= \lim_{z_n \to z_0} \langle k_{z_n}^b, k_z^b \rangle_b \\ &= \lim_{z_n \to z_0} \frac{1-\overline{b(z_n)}b(z)}{1-\overline{z_n}z} \\ &= \frac{1-\bar{\lambda}b(z)}{1-\overline{z_0}z} \end{aligned}$$

となる.

このとき, もし $|\lambda| < 1$ ならば, $h \notin H^2$. よって, $|\lambda| = 1$ である.

(2) $\Rightarrow$ (3) 仮定より, b は z_0 で non-tangential 極限 λ をもつ. よって, $\lambda = b(z_0)$ とかける.

$k_{z_0}^b(z) = (1-\overline{b(z_0)}b(z))/(1-\overline{z_0}z)$ とかくと, z を z_0 へ non-tangential に近づけるとき, k_z^b は $k_{z_0}^b$ に弱収束することを示せばよい.

あきらかに, k_z^b は $k_{z_0}^b$ に各点収束する. すなわち

$$\langle k_z^b, k_w^b \rangle_b \to \langle k_{z_0}^b, k_w^b \rangle_b, \quad w \in D \quad (z \to z_0).$$

k_w^b は $\mathcal{H}(b)$ を張るから, $z \to z_0$ のとき, $\|k_z^b\|_b < \infty$ を示せばよい.

$$\langle k_{z_0}^b, k_z^b \rangle_b = \frac{1-\overline{b(z_0)}b(z)}{1-\overline{z_0}z}$$

であるから, Schwarz の不等式より

$$\begin{aligned} \left| \frac{1-\overline{b(z_0)}b(z)}{1-\overline{z_0}z} \right|^2 &\le \|k_{z_0}^b\|_b^2 \|k_z^b\|_b^2 \\ &= \|k_{z_0}^b\|_b^2 \frac{1-|b(z)|^2}{1-|z|^2}. \end{aligned}$$

よって

$$\left|\frac{1-|b(z)|^2}{\overline{z_0}-z}\right|^2 \leq \|k^b_{z_0}\|^2_b \frac{1-|b(z)|^2}{1-|z|^2}.$$

すなわち

$$\|k^b_z\|^2_b = \frac{1-|b(z)|^2}{1-|z|^2}$$
$$\leq \|k^b_{z_0}\|^2_b \left(\frac{1+|b(z)|}{1+|z|}\right)^2 \left(\frac{|\overline{z_0}-z|}{1-|z|^2}\right)^2.$$

右辺は $z \to z_0$ のとき, 有界. よって（3）がいえる.
(3) $\Rightarrow$ (1) 一様有界性の定理より示せる. □

定理 3.4 (**Juria** の補題). 条件 (C) が成り立つならば

$$\frac{|b(z)-b(z_0)|^2}{1-|b(z)|^2} \leq c\frac{|z-z_0|^2}{1-|z|^2}, z \in D.$$

等号成立は b が $Möbius$ 変換のときに限る.

証明. 命題の不等式は

$$|\langle k^b_{z_0}, k^b_z\rangle_b|^2 \leq \|k^b_{z_0}\|^2_b \|k^b_z\|^2_b$$

として書き換えることができるが, これは Schwarz の不等式からでる. □

定理より, 条件 (C) は $(1-\overline{\lambda}b(z))/(1-z) \in H^2$ となるような絶対値 1 の複素数 λ が存在することと同値, という問題がでてくるが, これは一般には成り立たない.
$p \in (1/2, 2/3)$ を固定し, $b(z) = 1-2^{-p}(1-z)^p$ とおくと, 条件 (C) を満たさないが, $(1-b(z))/(1-z) \in H^2$ である.

付記. H^2 上の合成作用素の compact 性：もう一つ別の話
H^2 上の合成作用素 $C_b f = f \circ b$ の compact 性については, Shapiro による Nevanlinna の counting 関数による特徴付けがあるが, Sarason による $\mathcal{H}(b)$ 理論からのもう一つの特徴付けがある. それは

b が z_0 で Carathéodory の意味で角微分をもつ
$\Leftrightarrow$ 次の関係を満たす $\lambda \in \partial D$ が存在する：

$$\frac{Re(1-\overline{\lambda}b)}{Re(1-\overline{z_0}z)} \in L^1(\partial D)$$

ということに注意することから, 次の結果がでてくる：

合成作用素 C_b が H^2 上 compact である
$\Leftrightarrow$ 任意の $\lambda \in \partial D$ と定数でない任意の inner 関数 u(絶対値が 1) に対して,

$$\frac{Re(1-\overline{\lambda}b)}{Re(1-u)} \notin L^1(\partial D).$$

b の角微分の概念を拡張した微分商 $(1-b)/(1-u)$ については, [Sha99] で調べられている.

4. 問題

こうして導入された de Branges-Rovnyak 空間は単位円上の解析関数の空間として研究の好材料になる. そしてまた Hardy 空間論の諸問題と関係を持つことから, その構造の解明には大いなる注目をあびている. ここでは, そうした注目すべき興味ある問題を取り上げる.

4.1 不変部分空間問題

2 章で作用素 S が定義されたが, S は移動作用素 (unilateral shift) と呼ばれる. Hardy 空間の重要な問題の一つに作用素 S について不変な空間の特徴付けがあるが, H^2 のなかのものについては, 次の有名な Beurling の定理がある. Hardy 空間論関係の本参照.

Beurling の定理 (1949). $\mathcal{M}$ を H^2 の自明でない閉部分空間で, $S\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$ とする. このとき, ある $q \in H^2$ で $|q| = 1$ となるような関数が存在して,

$$\mathcal{M} = qH^2$$

とかける.

de Branges はこの $\mathcal{M}$ と H^2 の関係を Hilbert 空間とそこに縮小的に含まれる Hilbert 空間との関係において, ベクトル値 H^2 空間へ拡張した. これをスカラーの場合におきかえると次のようになる.

de Branges の定理. $\mathcal{M}$ を H^2 に縮小的に含まれる *Hilbert* 空間とし、$S\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$ で S が $\mathcal{M}$ 上等長作用素であるとき, ある $b \in H^\infty$, $\|b\|_\infty \leq 1$ が存在して, $\mathcal{M} = \mathcal{M}(b)$ とかける.

なお, 最近 Singh-Agrawal[SiA95], Singh-Thukral[SiTh97] が上の仮定「縮小的に含まれる」をはずして, 結果を得ている.

ところで $\mathcal{H}(b)$ や $\mathcal{H}(\bar{b})$ については, [定理 2.4] から $S^*\mathcal{H}(b) \subset \mathcal{H}(b)$, $S^*\mathcal{H}(\bar{b}) \subset \mathcal{H}(\bar{b})$ がいえていた. しかし, それ以上については, 例えば, $b \in \mathcal{H}(b)$, $b \in \mathcal{H}(\bar{b})$, $1 \in \mathcal{H}(b)$ については, まだ不明だった.

これらについての結果をいくつか拾ってみる.

(1) $|\lambda| < 1$ に対して, $k_\lambda \in \mathcal{H}(b)$ となるための必要十分条件は $b(\lambda) = 0$ かまたは b が H^∞ の閉単位球の端点ではないということである.

(2) b が原点で m 位の零点をとるとすると, $z^{m-1} \in \mathcal{H}(b)$ である.
$z^m \in \mathcal{H}(b)$ であるための必要十分条件は b が H^∞ の閉単位球の端点ではないということである.

このことから, 次のことがでる.

(3) $b \in \mathcal{H}(b)$ であるための必要十分条件は b が H^∞ の閉単位球の端点ではないということである.

このことと X^* の形から, 次のことがいえる.

(4) $S\mathcal{H}(b) \subset \mathcal{H}(b)$ であるための必要十分条件は b が H^∞ の閉単位球の端点ではないということである.

このように b が H^∞ の閉単位球の端点かどうかがkey になっている.

問題 1. b の場合によらない統一的特徴付けを求めよ.

Sarason, Suárez らの研究がある.

$\mathcal{M}$ を H^2 の閉部分空間とする. $h \in \mathcal{M}$, $h(0) = 0$ に対して, $S^*h \in \mathcal{M}$ であるとき, $\mathcal{M}$ は S^* に関してほとんど不変部分空間 (nearly invariant subspace) と呼ばれる. 例えば, $f \in L^\infty$, $f \neq 0$ で $KerT_f (\neq \{0\})$ であるものがその一例であるが, E. Hayashi, Nakazi らによって, Toeplitz 作用素の核については調べられている. これらについても Sarason は de Branges-Rovnyak 空間に基づいたアプローチを提出している.

問題 2. *Toeplitz* 作用素の核を特徴付けよ.

4.2 乗法因子問題

前節4.1 の (4) において, $S = T_z$ が $\mathcal{H}(b)$ の乗法因子になるための条件を述べたが, 2 章で導入された S の一般化である Q_λ についての不変性はどうか.

問題 3. Q_λ は $\mathcal{H}(b)$ について不変か?または, 不変になるための条件を特徴付けよ.

そして, もちろん $\mathcal{H}(b)$ の乗法因子全体については b が H^∞ の閉単位球の端点かどうかがkey になっていたが, 次の大問題が提出される.

問題 4. $\mathcal{H}(b)$ の乗法因子を b の場合によらずに, 特徴付けよ.

Crofoot[Cr94] が次のような問題を提出している.

問題 5. φ, ψ を *inner* 関数とする. $m : \mathcal{H}(\varphi) \to \mathcal{H}(\psi)$ が乗法因子ならば $m \in H^\infty$ か.

問題 6. 乗法因子 $m : \mathcal{H}(\varphi) \to \mathcal{H}(\psi)$ が存在すれば, φ, ψ は H^∞ の *inner* 関数の集合のなかで同じ *component* のなかにあるか.

4.3 H^1 の exposed 点

関数解析では凸集合の"ふち" を調べる意味で端点の研究がされているが, それよりも条件のきつい次のような点がある. X を Banach 空間, $ballX$ をその閉単位球 $\{\|x\|_X \leq 1\}$ とする. $x \in ballX$ が $ballX$ の exposed 点であるとは, $L \in X^*$, $L(x) = 1 = \|L\|$ であり, $y \neq x \in ballX$ に対して, $ReL(y) < 1$ となる L がとれるときをいう. 一般に exposed 点は端点である.

Hardy 空間において, $1 < p < \infty$ のときの端点は $\{\|x\|_p = 1\}$ となるため, 問題は $p = 1$ と $p = \infty$ の場合である. 空間 H^1 においての端点の研究では次の結果がある. $p = \infty$ の場合は, H^∞ を L^∞ の極大イデアル空間上の関数環とみることができる ([Oh83]).

De Leeuw-Rudin の定理 (1958). *ball*H^1 の端点は *norm* 1 の *outer* 関数である.

H^1 の outer 関数は H^2 の outer 関数の二乗でかけることから, この特徴付けが興味となってくる. その際に次のような関数を定義する. $f \in H^1$ が rigid であるとは, f の定数倍以外の H^1 の関数で, ∂D 上 (a.e. で) f と同じ偏角をもつものがないときをいう.

このとき, 次の定理で H^1 の exposed 点についてはまとめられる.

Bloomfield-Jewell-Hayashi の定理 (1983). $f \in H^2, \|f\|_2 = 1$ の *outer* 関数とする. このとき, 次のことは同値である：

(1) f^2 は *exposed* 点；
(2) f^2 は *rigid*；
(3) $KerT_{\overline{f}/f} = \{0\}$；
(4) $H^2(|f|^2 d\theta)$ は定数でない実数値関数を含まない。

Sarason はこの問題について, de Branges-Rovnyak 空間を使った特徴付けを試みた.

b を *ball*H^∞ の端点でないと仮定すると, Hardy 空間の理論より, $a \in H^\infty$ で $|a| = 1 - |b|^2$ となる outer 関数が存在する.

Sarason の定理 1. f^2 は *exposed* 点である必要十分条件は $\mathcal{M}(b)$ が $\mathcal{H}(b)$ で稠密であることである.

Sarason の定理 2. f^2 は *exposed* 点で, $v \in H^\infty$, $|v| = 1$ とする. このとき, $f_v = a/(1 - vb)$ と定義すると, $\|f_v\|_2 = 1$ であり, f_v^2 は *exposed* 点となる.

そして, Sarason は次の予想を提出した.

問題 7(Sarason の予想 (1988)). 次のことは同値である：

(i) f^2 は *exposed* 点；
(ii) $(1+u)^{-1} f \in H^2$ となる定数でない *inner* 関数 u は存在しない；
(iii) $\|f_\lambda\|_2 = 1, \quad \lambda \in \partial D$.

Sarason 自身, $(i) \Rightarrow (iii)$, $(ii) \Rightarrow (iii)$, $(i) \Rightarrow (ii)$ を示している. 残ったのは $(iii) \Rightarrow (i)$ である.

そして, そこから次のような問題が派生した.

(1) $g, h \in H^\infty$ ならば, $\|T_g T_{\overline{h}}\| \leq \|gh\|_\infty$ は成り立つか？

(2) $g, h \in H^2$ で $gh \in H^\infty$ とすると, $T_g T_{\overline{h}}$ は有界か？

実際, (1) については, $g \in (H^\infty)^{-1}, h = g^{-1}$ とおくと, $T_g T_{\overline{h}} = T_g T_{1/\overline{g}} = (T_{\overline{g}/g})^{-1}$ であるから, もし $\|T_{\overline{g}/g}\| \leq 1$ ならば, $\|T_{\overline{g}/g}\| = 1$. よって, $T_{\overline{g}/g}$ は unitary. しかし, unitary な作用素は恒等写像の定数倍だけとなるから矛盾. よって, (1) は否定される.

(2) については, $g \in H^2$ が $1/g \in H^2$ となる outer 関数で, $T_{\overline{g}/g}$ は可逆でないとするとき, $h = 1/g$ とおく. このとき, $T_g T_{1/\overline{g}}$ は有界でない.

(1) と (2) より, 次の問題が与えられる.

問題 8. 集合 $\{g, h \in H^2 : T_g T_{\bar{h}}$ は有界$\}$ を特徴付けよ. 同じく, いつ $T_g T_{\bar{h}}$ が *Toeplitz* 作用素になるか.

T が H^2 上の近似的 (asymptotic)Toeplitz 作用素であるとは $\lim S^{*n} T S^n$ が強位相で存在するときをいう. このとき, 次の問は自然である.

問題 9. $g, h \in H^2$ で $T_g T_{\bar{h}}$ が近似的 *Toeplitz* 作用素で, 少なくとも一方が非有界で $T_g T_{\bar{h}}$ が有界となるか?

4.4 Nehari の補間問題

表題の問題とは, $h_0 \in L^\infty$ に対して, $h - h_0 \in H^\infty$ となるような $h \in L^\infty, \|h\|_\infty \leq 1$ をみつけるということである. Nehari 自身が次の事実を示したことにちなんで彼の名前がつけられた.

Nehari の定理 (1957). 上の問題の解があることの必要十分条件は *Hankel* 作用素 H_{h_0} が $\|H_{h_0}\| \leq 1$ を満たすことである. ただし,$H_{h_0} f = (I - P)(h_0 f), f \in H^2$.

そして, 次の定理がある.

Adamjan-Arov-Krein の定理 (1968). h_0 に対する *Nehari* の問題が解をもつならば, その解は次の形をしている:

$$\frac{a}{\bar{a}}\left(\frac{u - \bar{b}}{1 - bu}\right), \quad u \in ball(H^\infty).$$

ただし

(1) $a, b \in ball(H^\infty)$;
(2) a は *outer* 関数で $a(0) > 0$;
(3) $b(0) = 0$;
(4) ∂D 上 *a.e.* で $|a|^2 + |b|^2 = 1$ が成り立つ.

a, b は一意に決定され, (a, b) は *Nehari* の対 *(pair)* とよばれる.

上の結果の逆が示せるか, ということが考えられるが, Garnett は Nehari の問題が H^1 の exposed 点の問題と同値であることを示した.

Garnett の定理 (1981). (a, b) が *Nehari* の対であることと $f = a/(a - b) \in H^2$ は $\|f\|_2 = 1$ で, f^2 が *exposed* 点であることは同値である.

よって, $\mathcal{H}(b)$ がこの問題に関係をもってくるわけで, 次の問題が提出される.

問題 10. *AAK* の関数の集合を含むような解集合をもつ *Nehari* の問題の自然な一般化があるか.

参考文献

[ASi98] S. Agrawal and D. Singh, *De Branges modules in* $H^2(C^k)$, Harmonic Analysis and Hypergroups, *Birkhäuser*, Basel, 1998, 51-58.

[An90] T. Ando, *De Branges Spaces and Analytic Operator Functions*, Lecture Note, Hokkaido Univ., 1990.

[At92] K. R. M. Attele, *Multipliers on the range of composition operators*, Tokyo J. Math. **15** (1992), 185-198.

[Bea86] A. Baernstern II et all, *The Bieberbach conjecture -Proceedings of the Symposium on the occasion of the proof*, Amer. Math. Soc., Providence, 1986.

[BC91] J. A. Ball and N. Cohen, *De Branges-Rovnyak operator models and systems theory : a survey*, Operator Theory: Advances amd Applications, Vol. 50, *Birkhäuser*, Basel, 1991, 93-136.

[dB85] L. de Branges, *A proof of the Bieberbach conjecture*, Acta Math. **154** (1985), 137-152.

[dB86] L. de Branges, *Underlying concepts in the proof of the Bieberbach conjecture* (1986), Proceeding of ICM, Berkeley, California, USA, 25-42.

[BR66] L. de Branges and J. Rovnyak, *Square Summable Power Series*, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1966.

[C78] J. B. Conway, *Functions of One Complex Variable*, Springer-Verlag, Berlin, Second Edition, 1978.

[C90] J. B. Conway, *A Course in Functional Analysis*, Springer-Verlag, Berlin, Second Edition, 1990.

[C95] J. B. Conway, *Functions of One Complex Variable II*, Springer-Verlag, Berlin, 1995.

[CoM95] C. C. Cowen and B. D. MacCluer, *Composition Operators on Spaces of Analytic Functions*, CRC Press, Boca Raton, 1995.

[Cr94] R. B. Crofoot, *Multipliers between invariant subspaces of the backward shift*, Pacific J. Math. **166** (1994), 225-246.

[DMc91] B. R. Davis and J. E. McCarthy, *Multipliers of de Branges' spaces*, Michigan Math. J. **38** (1991), 225-257.

[Do66] R. G. Douglas, *On majorization, factorization, and range inclusion of operators on Hilbert space*, Proc. Amer. Math. Soc. **17** (1966), 413-415.

[Do98] R. G. Douglas, *Banach Algebra Techniques in Operator Theory*, Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[Du70] P. L. Duren, *Theory of H^p Spaces*, Academic Press, New York and London, 1970.

[Fe97] S. H. Ferguson, *Backward shift invariant operator ranges*, J. Funct. Analysis **150** (1997), 526-543.

[FiW71] P. A. Fillmore and J. P. Williams, *On operator ranges*, Advances in Math. **7** (1971), 254-281.

[G81] J. B. Garnett, *Bounded Analytic Functions, Academic Press*, New York, 1981.

[Gr99] A. Z. Grinshpan, *The Bieberbach conjecture and Milin's functionals*, Amer. Math. Monthly **106** (1999), 203-214.

[Ha85] E. Hayashi, *The solution sets of extremal problems in H^1*, Proc. Amer. Math. Soc. **93** (1985), 690-696.

[Ha86] E. Hayashi, *The kernel of a Toeplitz operator*, Intgral Equations and Operator Theory **9** (1986), 588-591.

[Ho62] K. Hoffman, *Banach Spaces of Analytic Functions*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1962.

[dLR58] K. de Leeuw and W. Rudin, *Extreme ponits and extremum problems in H^1*, Pacific J. Math. **8** (1958), 467-485.

[L90a] B. A. Lotto, *Toeplitz operators on weigheted Hardy spaces*, Lec. Notes in Pure & Appl. Math. Vol. 136, Dekker, New York, 1990, 295-300.

[L90b] B. A. Lotto, *Inner multipliers of de Branges's spaces*, Integral Equations and Operator Theory **13** (1990), 216-230.

[LMc93] B. A. Lotto and J. E. McCarthy, *Composition preseves rigidity*, Bull. London Math. Soc. **25** (1993), 573-576.

[LSa91] B. A. Lotto and D. Sarason, *Multiplicative structure of de Branges' spaces*, Rev. Mat. Iberoamericana **7** (1991), 183-220.

[LSa93] B. A. Lotto and D. Sarason, *Multipliers of de Branges-Rovnyak spaces*, Indiana Univ. Math. J. **42** (1993), 907-920.

[LSa98] B. A. Lotto and D. Sarason, *Multiplicative structure of de Branges' spaces II*, Harmonic Analysis and Hypergroups, *Birkhäuser*, Basel, 1998, 51-58.

[MQ97] X. Ming-Qin, *A generalization of the de Branges theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. **125** (1997), 3605-3611.

[N83] T. Nakazi, *Exposed points and extremal problems in H^1*, J. Funct. Analysis **53** (1983), 224-230.

[N85] T. Nakazi, *Exposed points and extremal problems in H^1, II*, Tôhoku Math. J. **37** (1985), 265-269.

[N86] T. Nakazi, *Kernels of Toeplitz operators*, J. Math. Soc. Japan **38** (1986), 607-916.

[Oh83] S. Ohno, *Exposed points in function algebras*, Tokyo J. Math. **6** (1983), 135-142.

[R87] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, New York, Third Edition, 1987.

[San95] M. Sand, *Operator ranges and non-cyclic vectors for the backward shift*, Integral Equations and Operator Theory **22** (1995), 212-231.

[Sa78] D. Sarason, *Function Theory on the Unit Circle*, Virginia Polytechnic Institute and State Univ., Blacksburg, 1978.

[Sa86a] D. Sarason, *Doubly shift-invariant subspaces in H^2*, J. Operator Theory **16** (1986), 75-95.

[Sa86b] D. Sarason, *Shift-invariant spaces from the Bragesian point of view*, The Bieberbach conjecture –Proceedings of the Symposium on the occasion of the proof, Amer. Math. Soc., Providence, 1986, 153-166.

[Sa88a] D. Sarason, *Nearly invariant subspaces of the backward shifts*, Operator Theory: Advances amd Applications, Vol. 35, *Birkhäuser*, Basel, 1988, 481-493.

[Sa88b] D. Sarason, *Angular derivatives via Hilbert space*, Complex Variables **10** (1988), 1-10.

[Sa89] D. Sarason, *Exposed points in H^1,I*, Operator Theory: Advances amd Applications, Vol. 41, *Birkhäuser*, Basel, 1989, 485-496.

[Sa90a] D. Sarason, *Exposed points in H^1,II*, Operator Theory: Advances amd Applications, Vol. 48, *Birkhäuser*, Basel, 1990, 333-347.

[Sa91] D. Sarason, *Function theory and de Branges spaces's*, Proceedings of symposium in Pure Math. 51, 1991, 495-502.

[Sa92] D. Sarason, *Making an outer function from two inner functions*, Contemporary Math. vol.137, 1992, 407-414.

[Sa94a] D. Sarason, *Kernels of Toeplitz operators*, Operator Theory: Advances amd Applications, Vol. 48, *Birkhäuser*, Basel, 1994, 153-164.

[Sa94b] D. Sarason, *Sub-Hardy Hilbert Spaces in the Unit Disk*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1994.

[Sa97] D. Sarason, *Local Dirichlet spaces as de Branges-Rovnyak spaces*, Prc. Amer. Math. Soc. **125** (1997), 2133-2139.

[SaSu97] D. Sarason and D. Suárez, *Inverse problem for zeros of certain Koebe-related functions*, J. D'Analyse Math. **71** (1997), 149-158.

[Sha99] J. E. Shapiro, *Relative angular derivatives*, in preprint.

[Sh93] J. H. Shapiro, *Composition Operators and Classical Function Theory*, Springer-Verlag, New York, 1993.

[Si90] D. Singh, *Brangesian spaces in the polydisk*, Proc. Amer. Math. Soc. **110** (1990), 971-977.

[SiA95] D. Singh and S. Agrawal, *De Branges spaces contained in some Banach spaces of analytic functions*, Illnois J. Math. **39** (1995), 351-357.

[SiT97] D. Singh and V. Thukral, *Multiplication by finite Blaschke factors on de Branges spaces*, J. Operator Theory **37** (1997), 223-245.

[Su97a] D. Suárez, *Dense barreled spaces in Hardy spaces*, J. Operator Theory **37** (1997), 23-34.

[Su97b] D. Suárez, *Backward shift invariant spaces in H^2*, Indiana Univ. Math. J. **46** (1997), 593-619.

[Su97c] D. Suárez, *Closed commutants of the backward shift operator*, Pacific J. Math. **179** (1997), 371-396.

[YSiA98] B. S. Yadaw, D. Singh and S. Agrawal, *De Branges modules in $H^2(C^k)$ of the torus*, Harmonic Analysis and Hypergroups, *Birkhäuser*, Basel, 1998, 55-74.

[Z96] K. Zhu, *Sub-Bergman Hilbert spaces on the unit disk*, Indiana Univ. Math. J. **45** (1996), 165-176.